EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Programme : T.B.

Durée : 4 heures

N.B. Il est demandé **EXPRESSEMENT** aux candidats de donner des démonstrations **CLAIRES, CONCISES** et **RIGOUREUSES**. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur, non plus qu'une référence à un théorème du cours non précisé, ou dont on n'aurait pas contrôlé que les hypothèses sont vérifiées.
Les candidats **DOIVENT RESPECTER LES NOTATIONS** du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.
Il est **INUTILE** de **RECOPIER** le présent énoncé.

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

On se propose de trouver la solution du problème avec conditions initiales (1)

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\dfrac{dy}{dt} - 2\dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dz}{dt} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} \\ x(0) = \dfrac{16}{3} \ ; \ y(0) = \dfrac{2}{3} \ ; \ z(0) = \dfrac{10}{3} \\ \dfrac{dx}{dt}(0) = -7 \ ; \ \dfrac{dy}{dt}(0) = 16 \ ; \ \dfrac{dz}{dt}(0) = 8 \end{cases}$$

Pour cela on posera d'abord $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, $\frac{dz}{dt} = z'$.
On sera alors conduit à chercher la solution du problème (2) avec conditions initiales

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = -2y' - 2z' \\ \dfrac{dy'}{dt} = 2x' + z' \\ \dfrac{dz'}{dt} = 2x' - y' \\ x'(0) = -7 \ ; \ y'(0) = 16 \ ; \ z'(0) = 8. \end{cases}$$

1° - a) Remarquer que le problème (2) est équivalent au problème matriciel

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX \\ X(0) = \begin{bmatrix} -7 \\ 16 \\ 8 \end{bmatrix} \end{cases}$$

en posant $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Chercher les valeurs propres de A, montrer qu'elle est diagonalisable (dans $\mathbb{C}^3$) et trouver ses vecteurs propres.

b) Résoudre le problème (2)

2° - a) Pour éviter de faire intervenir les nombres complexes, on remarquera tout d'abord que le problème (2) admet une intégrale première évidente (c'est-à-dire une relation simple entre x', y' et z') et on se ramenera au problème (3) suivant :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = -x' - 4y' + 9 \\ \dfrac{dy'}{dt} = \dfrac{5}{2}x' + y' - \dfrac{9}{2} \\ x'(0) = -7 \ ; \ y'(0) = 16 \end{cases}$$

b) On montrera que les solutions du problème (3) sont aussi solutions du problème (4) :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} + 9x' = 9 \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + 9y' = 18 \\ x'(0) = -7 \ ; \ y'(0) = 16 \end{cases}$$

Trouver, parmi les solutions de (4), celle qui est la solution de (3); en déduire la solution de (2).

Tournez la page S. V. P.

3° - a) Déduire de I la solution du problème (1).

b) Que peut on dire du système des 3 vecteurs $\vec{f_1} = (\frac{16}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3})$, $\vec{f_2} = (-\frac{8}{3}, \frac{14}{3}, \frac{10}{3})$ et $\vec{f_3} = (1, 2, -2)$?

c) Si on note $\| \ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$, on choisit pour nouvelle base $(\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ ou $\vec{g_i} = \frac{\vec{f_i}}{\|\vec{f_i}\|}$ $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Que peut on dire de cette base ?

d) Donner l'équation de la trajectoire du point M dans cette nouvelle base : que remarque-t-on ? Dessiner soigneusement les projections de la trajectoire de M sur chacun des plans engendrés par les couples $(\vec{g_i}, \vec{g_j})$ $i \neq j$, i et $j \in \{1, 2, 3\}$.

4° - On appelle $\vec{\Omega}$ le vecteur de composantes (1, 2, -2) dans la base initiale. Montrer que

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\vec{\Omega} \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (E)$$

a) Montrer que le mouvement du point M est uniforme.

b) Donner une intégrale première de (E) (c'est-à-dire une conséquence de (E) ne faisant plus intervenir les dérivées secondes)

c) Calculer les composantes, dans la base initiale, de $\vec{V_o} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM_o}$ en notant $\vec{u_o}$ le vecteur de composantes (-7, 16, 8). Remplacer alors $\vec{V_o} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM_o}$ par un vecteur simple.

d) On pose $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} - \vec{\Omega} t$. Montrer que $\overrightarrow{ON}$ vérifie l'équation

$$\frac{d\overrightarrow{ON}}{dt} = -\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{ON}$$

e) En déduire que N décrit un cercle axé sur $\vec{\Omega}$, d'un mouvement uniforme.

f) (hors barême) Que peut on dire de la trajectoire du point M ?

• • •